Chap 1

- $C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- A est symétrique ssi $A^T = A$ et elle est anti-symétrique ssi $A^T = -A$
- A est orthogonale ssi $A^T A = A A^T = I_n$
- A est définie ⊕ si $x^T A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_{n\times 1}$
- Si A^{-1} existe $\Rightarrow$ A est non singulière sinon A est singulière
- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}^T(A)$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- On appelle mineur de l'élément a_{ij}, le déterminant M_{ij} d'ordre $(n-1)$ obtenu à partir du déterminant de A en supprimant de ce déterminant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.
- On appelle cofacteur de a_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- Det de matrice diagonale, triangulaire est le produit des termes constituant sa diagonale principale. ⚠
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ A est non singulière
- $\det(A^{-1}) = \det(A)$
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \, \text{tr}(A)$
- $r(A)$ est le nombre de max de ses lignes (ou colonnes) linéairement indépendantes
- $r(A) = r(A^T) \ / \ r(A+B) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$
- le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A
- le rayon spectrale de A est le plus grande valeur propre en module de A noté $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$

- $\|\ \|$ est une norme ssi
  $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
  + $\|u\| = 0$ ssi $u = \vec{0}$
  + $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
  + $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall p \geq 1$ Norme p

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ norme 1

- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ norme 2 $\quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$

- $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

I. Holder : $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

I. Cauchy-schwartz : $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

- norme matricielle subordonnée :
  $$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

- norme de Frobénius : $\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = tr(A^T A)$

norme 1 : $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

norme ∞ : $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$

- $\|A\|_2^2 = \rho(A^T A)$ norme 2 pour matrice quelconque
- $\|A\|_2 = \rho(A)$ norme 2 pour matrice carré symétrique
- X orthogonale $\Rightarrow \|Ax\|_2 = \|xA\|_2 = \|x^T A x\|_2 = \|A\|_2$
- $\rho(A) \leq \|A\|$
- Conditionnement mesure la dépendance de solution, mesure l'influence d'une perturbation
- A inversible :
  + $Cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$
  + $Cond(\alpha A) = Cond(A)$
  + $cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max \sigma_i(A)}{\min \sigma_i(A)}$
    avec $\sigma_i(A) = \sqrt{|\lambda_i(A^T A)|}$
    valeurs singulières de A
  + A symétrique :
    $$Cond_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$$
- Si $cond(A) \simeq 1$ alors A est dite bien conditionné
- Si $cond(A) >> 1$ alors A est dite mal conditionné

(2) - $r(A) = n \Rightarrow$ A est non singulière ⚠

Chap 2 :

- On appelle méthode directe de résolution $Ax = b$ une méthode qui donne la solution d'une manière exacte

- Théorème de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(A_{i,b})}{\det(A)} \quad i = 1 \dots n$$

(remplacer la colonne i de A par b)

- A Triangulaire inf (résolution linéaire) :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} x_1}{a_{22}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = 2 \dots n$$

Algorithme de descente :

Initialisation : A ; b ; n

$x_1 \leftarrow \frac{b_1}{a_{11}}$

Pour i allant de 2 jusqu'à n faire :

  $S \leftarrow 0$

  Pour j allant de 1 jusqu'à i-1 faire :

    $S \leftarrow S + a_{ij} * x_j$

  fin pour

  $x_i \leftarrow (b_i - S) / a_{ii}$

fin pour

- A triangulaire supérieure (résolution linéaire)

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1 \dots 1$$

Algorithme de remonté :

Initialisation : A ; b ; n

$x_n \leftarrow b_n / a_{nn}$

Pour i allant de n-1 jusqu'à 1 faire :

  $S \leftarrow 0$

  Pour j allant de i+1 jusqu'à n faire :

    $S \leftarrow S + a_{ij} * x_j$

  fin pour

  $x_i \leftarrow (b_i - S) / a_{ii}$

fin pour

- méthode d'élimination de Gauss : (pivot de gauss)

Cette méthode est basé sur :

+ Triangularisation / Factorisation / élimination
+ Résolution (Remonté / Descente)

- $L_1^{(k+1)} \leftarrow L_1^{(k)}$
- $L_k^{(k+1)} \leftarrow L_k^{(k)}$
- $L_{k+1}^{(k+1)} \leftarrow L_{k+1}^{(k)} - \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)}$
- $L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)}$
- $a_{ij}^{(k+1)} \leftarrow a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad (i,j = k+1, \dots, n)$
- $a_{ik}^{(k+1)} \leftarrow 0$
- $b_i^{(k+1)} \leftarrow b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$
- $m_{ik}^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$
- $A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)} \quad / \quad b^{(k+1)} = M^{(k)} b^{(k)}$
- $x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \; ; \; x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right) / a_{ii}^{(i)}$

⇒ Tout ceci n'est évidemment valable que si les pivots successifs des transformations sont non nuls

Algorithme :

Factorisation :
Initialisation : A, b, n
Pour k allant de 1 jusqu'à n-1 faire :
  si $a_{kk} = 0$ alors arrêter l'algo
  sinon
    Pour i allant de k+1 jusqu'à n faire :
      Pour j allant de k+1 jusqu'à n faire :
        $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}$
      fin pour
      $b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k$
    fin pour
  fin si
fin pour.
⇐ Remontée

- Il peut arriver que lors de l'élimination de l'ordre naturel de calcul qu'un pivot soit nul ou très proche de 0, ce qui rend cette méthode est non utilisable.

- **Gauss partiel :**
  - changement de pivot : (ligne)

$$|a_{ik}| = \max_{k \le p \le n} |a_{pk}|$$ (nouveau pivot de gauss)

Au $k^{ième}$ pas de l'élimination, on choisit comme ligne de pivot celle qui parmi les $(n-k+1)$ restantes, l'élément de module max en colonne k et on permute ds $A^{(k)}$ la $k^{ième}$ ligne naturelle et celle qui réalise ce max.

- **Gauss total :**
  - changement de pivot : (ligne et colonne)

Nouveau pivot :

$$\max_{k \le l,h \le n} |a_{lh}| = |a_{ij}|$$

- **Gauss Jordan :**

Le principe de la méthode consiste à mettre la matrice sous la forme diagonale

- **Décomposition LU :**

$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n}$ si tous les $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$\Rightarrow$ A peut être décomposé sous LU

  - L triangulaire inf avec des 1 sur le diagonal
  - U " sup tel que $A = LU$

$$\begin{cases} Ly = b & \text{algo de descente} \\ Ux = y & \text{algo de remonté} \end{cases}$$

  - $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$
  - Si A est inversible, il existe une matrice de permutation P telle que PA soit factorisable sous la forme LU : c'est la méthode d'élimination du Gauss à pivot partiel : $PA = LU$

(on utilise $A = PBP^{-1} \Rightarrow AP = PB$)

  - Si A est inversible, la méthode d'élimination du Gauss à pivot total consiste à trouver 2 matrices P et Q telles que PAQ soit factorisable sous la forme LU : $PAQ = LU$

+ $U = A$ après factorisation

+ $L = M^{-1} = (M^{(2)} M^{(1)})^{-1}$ (matrice 3,3)

+ A ~~sss~~ B equiv B

$\Rightarrow A = PBP^{-1}$

$AP = PB$

Algorithme :

Initialisation : $A, n, b, L = \text{eye}(3)$

~~Factorisation~~

Pour k allant de 1 jusqu'à $n-1$ faire

  Si $a_{kk} = 0$ alors "arrêter l'algo"

  Sinon

    Pour i allant de $k+1$ jusqu'à n faire :

      Pour j allant de $k+1$ jusqu'à n faire :

        $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}$

        $L_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$

        fin pour

      $a_{ik} = 0$

    fin pour

  fin si

fin pour

$U = A$

$y(1) = b(1) / L_{11}$

pour i allant de 2 jusqu'à n

  $s \leftarrow 0$

  pour j allant de 1 jusqu'à $i-1$

    $s = s + L_{ij} * y_j$

  ~~end~~ fin pour

  $y_i \leftarrow (b_i - s) / L_{ii}$

fin pour

pour i allant de $n-1$ jusqu'à 1

  $s \leftarrow 0$

  pour j allant de $i+1$ jusqu'à n

    $s = s + U_{ij} * x_j$

  fin pour

  $x_i \leftarrow (y_i - s) / U_{ii}$

fin pour

- $\det(A) = \det(U)$

Chap3

- méthodes direct fournissent la solution en un nbre fini d'op
- methodes itératives est de construire une suite convergente de vecteur $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ qui converge vers la sol exacte.
- $A = M - N$

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$
$$= Bx + c$$

- $\begin{cases} x^{(0)} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$
- conditions nécessaires et suffisantes de convergence
  - $\rho(B) < 1$
  - A matrice symetrique definie (+) telle que si $A = M - N$ et $M + N^T$ definie (+) et symetrique
- condition suffisante de convergence :
  - B est une matrice convergente ($B^k \to 0$ / B est nilpotent)
  - $\|B\| < 1$

- en présence de 2 methodes itératives convergentes la methode la plus performante est celle de la matrice d'iteration a le plus petit rayon spectrale.
- $A = D - E - F$ (Jacobi)

$$M = D$$
$$N = E + F$$
$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + C_J \end{cases}$$
$$B_J = D^{-1}(E + F)$$
$$C_J = D^{-1}b$$

- Si A est une matrice à diagonale strict dominante, Alors la méthode de Jacobi C.V

~~A $\in \mathbb{R}^{n,n}$ (ou $\mathbb{C}^{n,n}$)~~

⇒ Soit A une matrice (n,n) à valeurs réelles ou complexes. On dit que A est à diagonale strictement dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i.$$

- $\rho(B_J) = \max_{i \in [1..n]} |\lambda_i(B_J)|$

$\chi_\lambda(B_J) = \det(\lambda I_n - B_J)$

- Forme développée de Jacobi :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right]_{i=1..n}$$

- $A = D - E - F$ (~~Seid~~ Gauss-Seidel)

$M = D - E$

$N = F$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = B_{GS} x^{(k)} + C_{GS} \end{cases}$$

$B_{GS} = (D-E)^{-1} F$

$C_{GS} = (D-E)^{-1} b$

- Forme développée de Gauss-Seidel

~~$x_i^{(k+1)} = \ldots$~~

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[- \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)} + b_1 \right] \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right] \end{cases}$$

$i = 2..n$

- matrice diag ou triang $\Rightarrow$ les λ_i sont ds le diagonal



- Réordonner les équations de façon à assurer la convergence de 2 méthodes $\Rightarrow$ changement de ligne tel que $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ autrement la matrice devient à diagonale strictement dominante

Algo (Jacobi) :

Initialisation : A ; b ; n ; ε ; N_{max} ; $K \leftarrow 0$

$x^{(0)} = x_a$; $r_a \leftarrow b - A x_a$

Tant que $\| r_a \| > \varepsilon$ ou $K \leq N_{max}$ faire

  Pour i allant de 1 jusqu'à n faire

    $S \leftarrow 0$

    Pour j allant de 1 jusqu'à n faire :

      si $i \neq j$ Alors :

        $S \leftarrow S + a_{ij} * x_a(j)$

      fin si

    fin pour (j)

    $x_F \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} [-S + b_i]$

  fin pour

  $K \leftarrow K + 1$

  $x_a \leftarrow x_F$

  $r_a \leftarrow b - A x_a$

fin Tant que

Algo :

Initialisation : $x^{(0)}$; $x^{(1)}$; f ; ε ; $k \leftarrow 2$; N_{max}

Tant que $|f(x^{(k)})| > \varepsilon$ et $k \leq N_{max}$ faire

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)})$$

$k \leftarrow k+1$

fin Tant que

méthode de Newton :

$$\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \simeq \frac{1}{f'(x^{(k)})}$$

la suite de Newton est donnée par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases}$$

soit Δ_n la tangente à la courbe représentative de f au pt x_n, Alors x_{n+1} est l'abscisse d'intersection entre Δ_n et l'axe des abscisses

$$(x_{n+1}, 0) = \Delta_n \cap (y = 0)$$

Algo :

Initialisation : f ; f' ; $x^{(0)}$; ε ; $k \leftarrow 0$

Tant que $|f(x^{(k)})| > \varepsilon$ faire

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$k \leftarrow k+1$

fin Tant que

+ Pour éviter les boucles infinies, il faut rajouter ds la condition d'arrêt de la boucle Tant que une condition sur le nbre max d'itérations à atteindre.

Formule des différences finis :

pour h donné et petit on a :

$$f'(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)} + h) - f(x^{(k)})}{h}$$

Th de CV :

f C^2 sur $[a,b]$

$f(a)f(b) < 0$, on suppose f' et f'' ne s'annulent pas et gardent un signe constant sur $[a,b]$

$g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$; on pose $x^{(0)} = b$ (resp $x^{(0)} = a$)

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)})$ C.V vers α unique $\alpha \in [a,b]$

⚠ $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{k\to\infty} \dfrac{|x^{(k+1)}-\alpha|}{|x^{(k)}-\alpha|} = 0 \\ \lim_{k\to\infty} \dfrac{|x^{(k+1)}-\alpha|}{|x^{(k)}-\alpha|^2} = \dfrac{f''(x^{(k)})}{2f'(x^{(k)})} \end{cases}$

f est C^3 et $f(a)f(b)<0$ et f' et $f''>0$ sur $[a,b]$ ceci donne l'existance de α unique

Th de C.V 2 :

soit $f : [a,b] \in \mathbb{R}$ une fonction de C^2 vérifiant :

$f(a)f(b)<0$

$f'(x)\neq 0, \forall x \in [a,b]$

$f''(x)\neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \begin{cases} x^{(0)} \in [a,b] \text{ tel que } f(x^{(0)})f''(x^{(0)})>0 \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases}$

est convergente vers α

- $f \nearrow$ et change de signe sur $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=0$ a une unique solution

  $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \alpha \in [a,b]$

- la méthode de sécante a le principe que la solution est le pt d'intersection de la droite $(x^{k-1}, f(x^{k-1}))$ et $(x^k, f(x^k))$ avec l'axe d'abscisse.

- la méthode de Dichotomie n'utilise que la signe de $f(x)$ pour progresser alors que la méthode de la sécante utilise plus d'info sur $f(x)$ et progressera plus vite

  Dicho tjrs CV mais sécante Non

- La solution pour la méthode de fausse position dépend de $[a,b]$ et de f alors que la solution dichotomie dépend uniquement de $[a,b]$

Chap 4

- construire une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $x^{(k)} \longrightarrow \alpha$ avec α est une racine de f
- La convergence de ces méthodes dépend essentiellement du choix de $x^{(0)}$ ——> méthodes d'encadrement
  ↳ méthodes du pt fixe
- TVI (existence d'un zéro d'une fonction) :
  Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ ($[a,b] \subset \mathbb{R}$) vérifiant $f(a) * f(b) \leq 0$ alors $\exists$ au moins une racine α tq $f(\alpha)=0$
- méthode de dichotomie
  consiste à approcher la solution α par encadrement en réduisant à chaque itération la longueur de $[a,b]$

$a^{(0)} = a$ $\quad \alpha^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$

$b^{(0)} = b$ $\quad \alpha^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$

si $f(a) f(x_k) < 0$ alors $b = x_k$
sinon si $f(b) f(x_k) < 0$ alors $a = x_k$
si $f(x_k) = 0$ alors x_k est une racine de f

La méthode est globalement convergente
Le prob peut avoir plusieurs solutions et D'algo converge vers une des solutions.

Algo :

Initialisation : f; a; b; ε; $k \leftarrow 0$
$a^{(0)} \leftarrow a$
$b^{(0)} \leftarrow b$
$\alpha^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$
Tant que $|f(\alpha^{(k)})| > \varepsilon$ faire (convergence)
  Si $f(a^{(k)}) \cdot f(\alpha^{(k)}) < 0$ alors
    $b^{(k+1)} \leftarrow \alpha^{(k)}$
    $a^{(k+1)} \leftarrow a^{(k)}$
  Sinon si $f(b^{(k)}) \cdot f(\alpha^{(k)}) < 0$ alors
    $a^{(k+1)} \leftarrow \alpha^{(k)}$
    $b^{(k+1)} \leftarrow b^{(k)}$
  fin si
fin Tant que

la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et on a : $\alpha = \lim_{n \to +\infty} x^{(n)}$

$|x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$; $\forall k \in \mathbb{N}$ (k le nombre d'itération)

L'avantage de cette méthode est la convergence inconditionnelle si elle vérifie le TVI

l'erreur absolue de la méthode de dichotomie

$$|\alpha - \alpha^{(n)}| \leq \frac{b^{(n)} - a^{(n)}}{2} \leq \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2^{n+1}}$$

En d'autre terme, l'erreur est diminuée de moitié à chaque étape, ainsi la méthode converge linéairement

L'estimation de l'erreur fournit par ailleurs directement un critère d'arrêt pour la méthode, puisque, à précision ε donnée, cette dernière permet d'approcher α en Nmax d'itérations

$$\frac{|b-a|}{2^{N_{max}+1}} \leq \varepsilon \iff \log(|b-a|) - (N_{max}+1)\log 2 < \log \varepsilon$$

- méthode de Fausse Position :

utilise des informations sur $f(x)$ pas seulement le signe de f

Un principe de dichotomie sauf le choix de $c^{(k)}$ diffère

Il est donné par l'abscisse du pt d'intersection de la droite passant par $(a^{(k)}, f(a^{(k)}))$ et $(b^{(k)}, f(b^{(k)}))$

$$x^{(k)} = \frac{f(a^{(k)})\, b^{(k)} - f(b^{(k)})\, a^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})}$$

Algo :

Initialisation : $a^{(0)} = a$; $b^{(0)} = b$; f ; ε ; $k \leftarrow 0$;

$$\alpha^{(0)} \leftarrow \frac{f(a^{(0)})\, b^{(0)} - f(b^{(0)})\, a^{(0)}}{f(a^{(0)}) - f(b^{(0)})}$$

Tant que $|f(\alpha^{(k)})| > \varepsilon$ faire

si $f(a^{(k)}) \cdot f(\alpha^{(k)}) < 0$

$b^{(k+1)} \leftarrow \alpha^{(k)}$

$a^{(k+1)} \leftarrow a^{(k)}$

sinon

$b^{(k+1)} \leftarrow b^{(k)}$

finsi $a^{(k+1)} \leftarrow \alpha^{(k)}$

$$\alpha^{(k+1)} \leftarrow \frac{f(a^{(k+1)})\, b^{(k+1)} - f(b^{(k+1)})\, a^{(k+1)}}{f(a^{(k+1)}) - f(b^{(k+1)})}$$

$k \leftarrow k+1$

fin Tantque

- méthode de la sécante :

un que fausse position

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)})$$

Algo (Gauss - seidel) :

Initialisation : A ; b ; n ; ε ; N_{max} ; K ← 0

$x^{(0)} = x_a$; $r^{(0)} = r_a = b - A x_a$

Tant que $\|r_a\| > \varepsilon$ et $K \leq N_{max}$ faire :

$S_1 \leftarrow 0$

Pour j allant de 2 jusqu'à n faire :

$S_1 \leftarrow S_1 + a_{1j} * x_a(j)$

fin pour

$x_F^{(1)} \leftarrow \frac{1}{a_{11}} [-S_1 + b_1]$

Pour i allant de 2 jusqu'à n faire

$S_2 \leftarrow 0$; $S_3 \leftarrow 0$

Pour j allant de 1 jusqu'à i-1 faire

$S_2 \leftarrow S_2 + a_{ij} * x_F(j)$

fin pour

Pour j allant de i+1 jusqu'à n faire

$S_3 \leftarrow S_3 + a_{ij} * x_a(j)$

fin pour

$x_F(i) \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} [-S_2 - S_3 + b_i]$

fin pour

$K \leftarrow K + 1$

$x_a \leftarrow x_F$

$r_a = b - A x_a$

fin Tant que

- ⚠ A est à diag strictement dominant

  ⇒ les 2 methodes C.V

- A est definie (+) Si tout les mineurs sont strictement (+) (on calcule det)

r_1 r_2 r_3

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$